

IMO 2026 - Bài 6

Dãy tham lam, kernel tối thiểu và rào chắn lũy thừa

THÔNG TIN TÀI LIỆU

Kết quả cuối: tồn tại các số nguyên dương T, L sao cho

$$a_{n+T} = a_n + L \quad \text{với mọi } n \geq 1.$$

Kiến trúc chứng minh: nén dãy thành một tập cố định $\mathcal{A}$; xét các phần tử tối tiểu theo chia hết; dùng một “rào chắn lũy thừa” để chứng minh mọi nguyên tố trong kernel đều nhỏ hơn a_1^2 ; từ đó $\mathcal{A}$ là hợp hữu hạn các tập bội và tuần hoàn theo modulo.

1 Đề bài

Cho một dãy vô hạn $a_1, a_2, a_3, \dots$ gồm các số nguyên lớn hơn 1. Giả sử với mọi số nguyên dương n , số hạng a_{n+1} là số nguyên dương nhỏ nhất lớn hơn a_n sao cho

$$\gcd(a_{n+1}, a_i) > 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên dương T, L sao cho

$$a_{n+T} = a_n + L$$

với mọi số nguyên dương n .

2 Bản đồ chiến lược

Nén bài toán động thành một tập cố định

Đặt

$$\mathcal{A} = \{m > 1 : \gcd(m, a_i) > 1 \text{ với mọi } i \geq 1\}.$$

Dãy (a_n) chính là phép liệt kê tăng dần các phần tử của $\mathcal{A}$ không nhỏ hơn a_1 . Vì vậy chỉ cần chứng minh $\mathcal{A}$ tuần hoàn theo một modulo L .

Lộ trình chứng minh:

1. chứng minh $\mathcal{A}$ đóng lên theo chia hết và đôi một không nguyên tố cùng nhau;
2. xét các phần tử tối tiểu của $\mathcal{A}$ theo quan hệ chia hết, gọi là các *kernel*;
3. chứng minh chỉ có hữu hạn kernel bằng cách chặn mọi nguyên tố trong kernel bởi a_1^2 ;
4. lấy L là bội chung nhỏ nhất của các kernel và đếm số lớp dư hợp lệ để thu được T .

3 Tập admissible và các tính chất cơ bản

Bổ đề 3.1. Dãy (a_n) liệt kê tăng dần đúng các phần tử của $\mathcal{A}$ nằm trong $[a_1, \infty)$.

Chứng minh. Mỗi a_n có ước chung lớn hơn 1 với mọi số hạng trước nó do cách chọn, và với mọi số hạng sau nó do điều kiện áp dụng ở các bước sau. Vì thế $a_n \in \mathcal{A}$.

Nếu $m \in \mathcal{A}$ và $m > a_n$, thì m là một ứng viên hợp lệ ở bước chọn a_{n+1} . Do tính nhỏ nhất,

$$a_{n+1} \leq m.$$

Vì vậy dãy không thể bỏ qua một phần tử nào của $\mathcal{A}$ lớn hơn a_1 . □

Bổ đề 3.2. Tập $\mathcal{A}$ có hai tính chất:

1. nếu $m \in \mathcal{A}$ và $m \mid M$, thì $M \in \mathcal{A}$;
2. nếu $x, y \in \mathcal{A}$, thì $\gcd(x, y) > 1$.

Chứng minh. Mệnh đề đầu hiển nhiên vì mọi ước chung của m với a_i cũng chia M .

Giả sử $x, y \in \mathcal{A}$ nhưng $\gcd(x, y) = 1$. Chọn k đủ lớn sao cho $kx > a_1$ và $\gcd(k, y) = 1$, chẳng hạn chọn $k \equiv 1 \pmod{y}$ đủ lớn. Từ tính đóng lên, $kx \in \mathcal{A}$, nên kx xuất hiện trong dãy. Nhưng

$$\gcd(kx, y) = 1,$$

trái với $y \in \mathcal{A}$. □

4 Kernel tối thiểu

Với $m > 1$, ký hiệu

$$\text{rad}(m) = \prod_{p|m} p.$$

Nếu $m \in \mathcal{A}$ thì $\text{rad}(m) \in \mathcal{A}$, vì hai số có cùng tập ước nguyên tố. Trong các ước của $\text{rad}(m)$ thuộc $\mathcal{A}$, chọn một ước tối thiểu theo chia hết. Ta gọi nó là một *kernel*.

Mỗi kernel là số vuông tự do. Hơn nữa, mọi $m \in \mathcal{A}$ chia hết cho ít nhất một kernel. Do tính đóng lên,

$$\mathcal{A} = \bigcup_{b \in \mathcal{K}} b\mathbb{N}, \quad (1)$$

trong đó $\mathcal{K}$ là họ tất cả các kernel.

Vì vậy nút thắt duy nhất còn lại là:

Bổ đề khóa

Họ kernel $\mathcal{K}$ là hữu hạn.

5 Bổ đề nhân chứng và rào chắn lũy thừa

Bổ đề 5.1 (Nhân chứng xuất hiện trước một lũy thừa). Cho $d > 1$ và $d \notin \mathcal{A}$. Gọi j là chỉ số nhỏ nhất sao cho

$$\gcd(d, a_j) = 1.$$

Nếu s là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa $d^s > a_1$, thì

$$a_j < d^s. \quad (2)$$

Chứng minh. Giả sử $a_j \geq d^s$. Gọi t là chỉ số đầu tiên sao cho $a_t \geq d^s$. Khi đó $t \leq j$ và, với mọi $i < t$, ta có $\gcd(d, a_i) > 1$. Do đó d^s có ước chung lớn hơn 1 với mọi a_i trước bước t và là một ứng viên hợp lệ.

Bởi tính tham lam, $a_t \leq d^s$. Kết hợp với định nghĩa của t , suy ra $a_t = d^s$.

Nếu $t = j$ thì $\gcd(a_j, d) > 1$, mâu thuẫn. Nếu $t < j$ thì a_t và a_j là hai số hạng của dãy nên có ước chung lớn hơn 1. Nhưng mọi ước nguyên tố của $a_t = d^s$ đều chia d , lại mâu thuẫn với $\gcd(a_j, d) = 1$. □

Ý nghĩa của bổ đề là: một số không thuộc $\mathcal{A}$ phải bị một số hạng của dãy “phát hiện” trước khi dãy vượt qua lũy thừa đầu tiên của nó nằm trên a_1 .

6 Mọi nguyên tố trong kernel đều nhỏ hơn a_1^2

Cố định một nguyên tố p xuất hiện trong ít nhất một kernel. Trong tất cả các kernel chứa p , chọn

$$b = pd$$

sao cho cofactor $d = b/p$ nhỏ nhất.

Nếu $d = 1$, thì $p = b \in \mathcal{A}$. Vì p phải có ước chung với a_1 , suy ra $p \mid a_1$, nên $p \leq a_1$.

Xét $d > 1$. Do b là kernel, ước thực sự d không thuộc $\mathcal{A}$. Chọn j nhỏ nhất sao cho

$$\gcd(d, a_j) = 1. \quad (3)$$

Vì $a_j, b \in \mathcal{A}$, hai số này không nguyên tố cùng nhau. Từ $b = pd$ và (3), ước chung duy nhất có thể đến từ p , nên

$$p \mid a_j. \quad (4)$$

Chọn một kernel c chia $\text{rad}(a_j)$. Vì $c, b \in \mathcal{A}$, ta có $\gcd(c, b) > 1$. Mặt khác $c \mid a_j$ và $\gcd(a_j, d) = 1$, nên c không chứa nguyên tố nào của d . Do đó $p \mid c$; viết

$$c = pe. \quad (5)$$

Nếu $d > a_1$, trong Bổ đề 5.1 ta có $s = 1$, nên $a_j < d$. Từ (5),

$$e = \frac{c}{p} \leq \frac{a_j}{p} < d,$$

trái với cách chọn d nhỏ nhất trong các kernel chứa p . Vì thế

$$d \leq a_1. \quad (6)$$

Bây giờ lấy s nhỏ nhất sao cho $d^s > a_1$. Khi đó

$$d^{s-1} \leq a_1 \implies d^s \leq a_1 d \leq a_1^2.$$

Từ Bổ đề 5.1 và (4),

$$p \leq a_j < d^s \leq a_1^2.$$

Do đó:

Định lý 6.1. Mọi nguyên tố xuất hiện trong một kernel đều thỏa

$$p < a_1^2. \quad (7)$$

Chỉ có hữu hạn số nguyên tố nhỏ hơn a_1^2 , và mỗi kernel là tích của một tập con các nguyên tố đó. Vì vậy họ $\mathcal{K}$ hữu hạn. Bổ đề khóa đã được chứng minh.

7 Từ hữu hạn kernel đến tuần hoàn tịnh tiến

Liệt kê các kernel là

$$\mathcal{K} = \{b_1, b_2, \dots, b_r\}.$$

Theo (1),

$$\mathcal{A} = b_1\mathbb{N} \cup b_2\mathbb{N} \cup \dots \cup b_r\mathbb{N}.$$

Đặt

$$L = \text{lcm}(b_1, b_2, \dots, b_r). \quad (8)$$

Vì $b_i \mid L$ với mọi i ,

$$b_i \mid m \iff b_i \mid m + L.$$

Suy ra

$$m \in \mathcal{A} \iff m + L \in \mathcal{A}. \quad (9)$$

Gọi T là số lớp dư modulo L thuộc $\mathcal{A}$:

$$T = \#\{1 \leq r \leq L : b_i \mid r \text{ với ít nhất một } i\}. \quad (10)$$

Mỗi đoạn gồm L số nguyên liên tiếp chứa đúng T phần tử của $\mathcal{A}$. Đặc biệt, khoảng

$$(a_n, a_n + L]$$

chứa đúng T phần tử của $\mathcal{A}$, phần tử cuối là $a_n + L$. Vì (a_n) liệt kê $\mathcal{A}$ theo thứ tự tăng dần,

$$a_{n+T} = a_n + L$$

với mọi $n \geq 1$.

Kết luận

Tồn tại các số nguyên dương T, L thỏa

$$a_{n+T} = a_n + L \quad \text{với mọi } n \geq 1.$$

Chuỗi sai phân $a_{n+1} - a_n$ vì thế là tuần hoàn với chu kỳ T .

8 Kiểm toán các điểm dễ bỏ sót

Bẫy 1: khoảng cách bị chặn chưa đủ

Từ việc mọi bội của a_1 thuộc $\mathcal{A}$ có thể suy ra $a_{n+1} - a_n \leq a_1$, nhưng một dãy có bước nhảy trong một tập hữu hạn chưa chắc tuần hoàn. Cần hữu hạn hóa các kernel.

Bẫy 2: phải dùng lũy thừa d^s

Một bội tùy ý của d có thể chứa nguyên tố mới, nên một số hạng nguyên tố cùng nhau với d vẫn có thể giao với bội đó qua nguyên tố mới. Lũy thừa d^s có đúng cùng tập ước nguyên tố với d , vì thế tạo ra rào chắn tuyệt đối.

Bẫy 3: cặp chu kỳ không duy nhất

Nếu một cặp (T, L) thỏa mãn thì mọi cặp (kT, kL) cũng thỏa mãn. Đề bài chỉ yêu cầu tồn tại, không yêu cầu xác định cặp nguyên thủy.

9 Góc nhìn cấu trúc

Quy tắc tham lam ban đầu dường như phụ thuộc vào toàn bộ lịch sử. Tuy nhiên, tập $\mathcal{A}$ biến lịch sử ấy thành một đối tượng tĩnh. Kernel mô tả những “giấy thông hành nguyên tố” tối thiểu để một số thuộc $\mathcal{A}$. Bỏ đề lũy thừa cho thấy một nguyên tố mới không thể trốn quá lâu: nếu cofactor còn lớn, ta tạo được một kernel nhỏ hơn; nếu cofactor đã nhỏ, lũy thừa đầu tiên của nó nằm dưới a_1^2 . Vì thế chỉ hữu hạn nguyên tố và hữu hạn kernel có thể xuất hiện. Phần còn lại là số học modulo.