

IMO 2026 - Bài 5

RMS-AM-GM, quỹ đạo của hàm và độ lệch hằng

THÔNG TIN TÀI LIỆU

Kết quả cuối:

$$f(x) = x + c \quad (c \geq 0).$$

Kiến trúc chứng minh: ép hai đầu của chuỗi bất đẳng thức bằng nhau bằng phép thế $x = f(y)$; đặt $g(x) = f(x) - x$; dùng quỹ đạo của f và một bộ kẹp định lượng để chứng minh g là hằng.

1 Đề bài

Ký hiệu $\mathbb{R}_{>0}$ là tập các số thực dương. Xác định tất cả các hàm

$$f : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$$

thỏa mãn

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)} \quad (1)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

2 Bản đồ chiến lược

Trực giác cấu trúc

Hai đầu của (1) là hai vế trong chuỗi quen thuộc

$$\text{RMS}(x, f(y)) \geq \text{AM}(x, f(y)) \geq \text{GM}(x, f(y)).$$

Nếu biểu thức giữa đúng bằng $\frac{x+f(y)}{2}$, thì ta phải có

$$f(x) + y = x + f(y),$$

tức $f(x) - x$ là hằng. Vì vậy đặt

$$g(x) = f(x) - x$$

và tìm cách chứng minh g không phụ thuộc vào x .

Các nghĩa vụ chứng minh là:

1. tạo một quan hệ lặp đủ mạnh cho f ;
2. chứng minh $g(x) \geq 0$;
3. chứng minh mọi giá trị dương của g bằng nhau;
4. loại trừ khả năng g đồng thời nhận 0 và một hằng số dương;
5. kiểm tra trực tiếp họ nghiệm thu được.

3 Nhát đánh cân bằng: chọn $x = f(y)$

Trong (1), thay $x = f(y)$. Khi đó hai đầu đều bằng $f(y)$:

$$\sqrt{\frac{f(y)^2 + f(y)^2}{2}} = f(y) \quad \text{và} \quad \sqrt{f(y)f(y)} = f(y).$$

Vì biểu thức giữa bị kẹp giữa hai số bằng nhau,

$$\frac{f(f(y)) + y}{2} = f(y),$$

hay

$$\boxed{f(f(y)) = 2f(y) - y.} \quad (2)$$

Với $g(x) = f(x) - x$, ta có

$$f(f(y)) = f(y) + g(f(y)).$$

So sánh với (2) và dùng $f(y) = y + g(y)$, suy ra

$$\boxed{g(f(y)) = g(y)}. \quad (3)$$

Độ lệch g được bảo toàn dọc theo quỹ đạo của f .

4 Quỹ đạo của f và dấu của g

Từ $f(y) = y + g(y)$ và (3), bằng quy nạp ta thu được

$$\boxed{f^n(y) = y + ng(y)} \quad (4)$$

với mọi số nguyên $n \geq 0$.

Thật vậy, nếu $f^n(y) = y + ng(y)$ thì

$$f^{n+1}(y) = f^n(y) + g(f^n(y)) = y + ng(y) + g(y),$$

vì (3) cho $g(f^n(y)) = g(y)$.

Do $f^n(y) > 0$ với mọi n , không thể có $g(y) < 0$: nếu vậy, $y + ng(y)$ sẽ âm khi n đủ lớn. Vì thế

$$\boxed{g(y) \geq 0 \text{ với mọi } y > 0.} \quad (5)$$

5 Bộ kẹp định lượng cho độ lệch

Đặt

$$Z = f(y) > 0.$$

Vì $y = Z - g(y)$ và $f(x) = x + g(x)$,

$$f(x) + y = x + Z + g(x) - g(y).$$

Từ nửa phải của (1),

$$x + Z + g(x) - g(y) \geq 2\sqrt{xZ},$$

suy ra

$$\boxed{g(x) - g(y) \geq -(\sqrt{x} - \sqrt{Z})^2}. \quad (6)$$

Từ nửa trái của (1),

$$x + Z + g(x) - g(y) \leq \sqrt{2(x^2 + Z^2)},$$

nên

$$g(x) - g(y) \leq \sqrt{2(x^2 + Z^2)} - (x + Z).$$

Rational hóa vế phải:

$$\sqrt{2(x^2 + Z^2)} - (x + Z) = \frac{(x - Z)^2}{\sqrt{2(x^2 + Z^2)} + x + Z}.$$

Do đó

$$\boxed{g(x) - g(y) \leq \frac{(x - Z)^2}{\sqrt{2(x^2 + Z^2)} + x + Z}. \quad (7)$$

Hai cận (6), (7) cho thấy: nếu x và $f(y)$ có khoảng cách bị chặn trong khi cả hai tiến ra vô hạn, thì $g(x) - g(y) \rightarrow 0$.

6 Mọi giá trị dương của g đều bằng nhau

Giả sử

$$g(u) = a > 0, \quad g(v) = b > 0.$$

Theo (4),

$$u_n = f^n(u) = u + na, \quad v_m = f^m(v) = v + mb.$$

Đồng thời

$$g(u_n) = a, \quad g(v_m) = b, \quad f(v_m) = v + (m+1)b.$$

Với mỗi m đủ lớn, chọn số nguyên $n = n(m) \geq 0$ gần nhất với

$$\frac{v + (m+1)b - u}{a}.$$

Khi đó

$$|u_n - f(v_m)| \leq \frac{a}{2}, \quad (8)$$

trong khi $u_n, f(v_m) \rightarrow \infty$.

Áp dụng (6) và (7) với $x = u_n, y = v_m, Z = f(v_m)$, ta được

$$-(\sqrt{u_n} - \sqrt{f(v_m)})^2 \leq a - b \leq \frac{(u_n - f(v_m))^2}{\sqrt{2(u_n^2 + f(v_m)^2)} + u_n + f(v_m)}. \quad (9)$$

Nhờ (8), tử số ở cận phải bị chặn, còn mẫu tiến ra vô hạn. Cận phải tiến về 0. Cận trái cũng tiến về 0 vì

$$(\sqrt{u_n} - \sqrt{f(v_m)})^2 = \frac{(u_n - f(v_m))^2}{(\sqrt{u_n} + \sqrt{f(v_m)})^2}.$$

Cho $m \rightarrow \infty$ trong (9), suy ra

$$a - b = 0.$$

Bổ đề 6.1. Mọi giá trị dương của g đều bằng cùng một hằng số $c > 0$.

Vì $g \geq 0$, hoặc $g \equiv 0$, hoặc g chỉ nhận các giá trị 0 và một hằng số $c > 0$.

7 Không thể đồng thời có $g = 0$ và $g = c > 0$

Giả sử tồn tại $u, v > 0$ sao cho

$$g(u) = 0, \quad g(v) = c > 0.$$

Xét đoạn đóng nối u và v . Hai tập

$$A = \{x : g(x) = 0\}, \quad B = \{x : g(x) = c\}$$

phân hoạch đoạn đó và đều không rỗng. Vì một đoạn là liên thông, khoảng cách giữa A và B trên đoạn phải bằng 0. Do đó tồn tại các dãy

$$x_n \in B, \quad y_n \in A$$

cùng hội tụ đến một điểm $t > 0$.

Với $y = y_n$, ta có $f(y_n) = y_n$. Áp dụng cận trên (7) với $x = x_n$,

$$c = g(x_n) - g(y_n) \leq \frac{(x_n - y_n)^2}{\sqrt{2(x_n^2 + y_n^2)} + x_n + y_n}.$$

Vế phải tiến về 0 khi $n \rightarrow \infty$, mâu thuẫn với $c > 0$.

Vậy g không thể nhận đồng thời 0 và một giá trị dương. Kết hợp với các phần trên,

$$g(x) = c \quad \text{với mọi } x > 0$$

cho một hằng số $c \geq 0$. Do đó

$$f(x) = x + c \quad (c \geq 0). \quad (10)$$

8 Kiểm tra họ nghiệm

Cho

$$f(x) = x + c, \quad c \geq 0.$$

Khi đó f nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}_{>0}$ và

$$f(x) + y = x + c + y = x + f(y).$$

Bất đẳng thức cần kiểm tra trở thành

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{x + f(y)}{2} \geq \sqrt{xf(y)},$$

đúng theo chuỗi RMS–AM–GM cho hai số dương x và $f(y)$.

Đáp án hoàn chỉnh

Tất cả các hàm thỏa mãn đề bài là

$$f(x) = x + c \quad (c \geq 0).$$

9 Kiểm toán các điểm dễ bỏ sót

Bẫy 1: dấu bằng RMS–AM–GM không tự động áp dụng

Biểu thức giữa ban đầu là $\frac{f(x)+y}{2}$, không phải $\frac{x+f(y)}{2}$. Cần chứng minh độ lệch $f(t) - t$ là hằng trước khi nhận diện đầy đủ chuỗi RMS–AM–GM.

Bẫy 2: quỹ đạo không cần tiến sát nhau tuyệt đối

Trong bước so sánh hai giá trị dương a, b , chỉ cần $|u_n - f(v_m)|$ bị chặn trong khi các điểm tiến ra vô hạn. Hai cận (6), (7) khi đó vẫn co về 0.

Bắt 3: phải loại trừ hỗn hợp 0 và c

Việc chứng minh mọi giá trị dương của g bằng nhau chưa đủ. Cần dùng tính liên thông của $\mathbb{R}_{>0}$ cùng bộ kẹp địa phương để loại khả năng g nhận cả 0 và $c > 0$.

10 Góc nhìn cấu trúc

Phép thế $x = f(y)$ tạo một điểm cân bằng tuyệt đối: hai đầu của chuỗi kẹp trùng nhau. Quan hệ thu được làm mỗi quỹ đạo của f trở thành một cấp số cộng với bước $g(y)$. Bộ kẹp (6), (7) đóng vai trò một verifier định lượng, buộc các bước quỹ đạo khác nhau phải bằng nhau. Cuối cùng, tính liên thông loại bỏ sự phân mảnh giữa bước 0 và bước dương. Vì thế toàn bộ họ nghiệm chỉ còn các phép tịnh tiến có hệ số góc 1.