

IMO 2026 - Bài 4

Trò chơi cắt tam giác, chuẩn hóa góc và thể bao vây hai nhánh

THÔNG TIN TÀI LIỆU

Kết quả cuối:

$$\theta = \frac{180^\circ}{n} \quad (n = 2, 3, 4, \dots).$$

Kiến trúc chứng minh: đặt $q = 180^\circ/\theta$. Nếu q nguyên, Mộc Lan tạo một nhát cắt sao cho cả hai tam giác con đều có một góc là bội nguyên của θ , rồi giảm bội ấy từng đơn vị. Nếu q không nguyên, Thiên Vũ duy trì bất biến: cả ba góc, khi chia cho θ , đều không nguyên.

1 Đề bài

Thiên Vũ và Mộc Lan chơi một trò chơi. Cho một góc θ với

$$0^\circ < \theta < 180^\circ,$$

mà cả hai người chơi đều biết. Đầu tiên, Thiên Vũ làm một tam giác T bằng giấy với kích thước tùy ý. Sau đó, họ liên tục thực hiện các bước sau:

- Nếu T có ít nhất một góc có số đo bằng đúng θ , trò chơi kết thúc và Mộc Lan thắng.
- Nếu không, Mộc Lan chọn một điểm P trên biên của T , không trùng với một đỉnh. Cô cắt T theo đoạn thẳng nối P với đỉnh đối diện, chia T thành hai tam giác.
- Thiên Vũ bỏ một trong hai tam giác. Tam giác còn lại trở thành tam giác T mới.

Xác định tất cả các giá trị thực của θ mà Mộc Lan có thể bảo đảm thắng sau hữu hạn bước, bất kể Thiên Vũ chơi thế nào.

2 Bản đồ chiến lược

Trực giác minimax: khóa cả hai đường thoát

Mộc Lan không được quyền chọn tam giác còn lại. Vì vậy một nhát cắt hữu ích phải tạo ra hai nhánh đều có lợi: dù Thiên Vũ bỏ bên nào, trạng thái mới vẫn nằm trong vùng Mộc Lan kiểm soát.

Chuẩn hóa mọi góc bằng đơn vị θ và đặt

$$q = \frac{180^\circ}{\theta}.$$

Mộc Lan thắng khi một góc chuẩn hóa bằng đúng 1.

Bài toán tách thành hai phía:

1. nếu $q \in \mathbb{Z}$, dựng một thể bao vây hai nhánh và giảm một góc nguyên về 1;
2. nếu $q \notin \mathbb{Z}$, Thiên Vũ chọn tam giác đều và giữ bất biến “không có góc chuẩn hóa nào là số nguyên”.

3 Mô hình chính xác của một nhát cắt

Giả sử tam giác hiện tại có các góc

$$a\theta, \quad b\theta, \quad c\theta,$$

với

$$a, b, c > 0, \quad a + b + c = q. \quad (1)$$

Mộc Lan cắt từ đỉnh có góc $a\theta$ đến cạnh đối diện, chia góc đó thành

$$x\theta \quad \text{và} \quad (a - x)\theta, \quad 0 < x < a.$$

Hai tam giác con có các bộ góc chuẩn hóa

$$(b, x, q - b - x) \quad (2)$$

và

$$(c, a - x, b + x). \quad (3)$$

Công thức (2), (3) là toàn bộ cơ chế của trò chơi. Mọi chiến lược sau đây chỉ là cách chọn x để cả hai bộ đều mang một dấu hiệu kiểm soát được.

4 Khi $q = n$ là số nguyên: Mộc Lan thắng

Vì $0^\circ < \theta < 180^\circ$, ta có $n \geq 2$.

4.1 Bước một: tạo một góc nguyên ở cả hai nhánh

Bổ đề 4.1. Giả sử a, b, c trong (1) đều không nguyên và $a + b + c = n \in \mathbb{Z}$. Mộc Lan có thể chọn một nhát cắt sao cho mỗi tam giác con đều có ít nhất một góc chuẩn hóa là số nguyên.

Chứng minh. Ta sẽ gán lại tên các góc nếu cần để tìm một số nguyên k thỏa

$$b < k < a + b. \quad (4)$$

Nếu có một góc lớn hơn 1, gọi góc đó là a . Khoảng $(b, a + b)$ có độ dài $a > 1$, nên chứa một số nguyên k .

Nếu không có góc nào lớn hơn 1, do cả ba góc đều không nguyên nên

$$0 < a, b, c < 1.$$

Từ $a + b + c = n$ và $n \geq 2$ nguyên, suy ra $n = 2$. Khi đó có một cặp góc có tổng lớn hơn 1; gọi chúng là a, b . Vì $b < 1 < a + b$, ta lấy $k = 1$.

Trong cả hai trường hợp, chọn

$$x = k - b.$$

Điều kiện (4) cho $0 < x < a$, nên đây là một nhát cắt hợp lệ. Trong tam giác (3), ta có

$$b + x = k \in \mathbb{Z},$$

còn trong tam giác (2),

$$q - b - x = n - k \in \mathbb{Z}.$$

Vì thế, dù Thiên Vũ giữ tam giác nào, tam giác mới cũng có một góc là bội nguyên của θ . $\square$

Đây chính là thế “bỏ bên nào cũng mắc bẫy”: Mộc Lan không đoán lựa chọn của đối thủ mà khóa đồng thời cả hai lựa chọn.

4.2 Bước hai: giảm bội nguyên về 1

Giả sử tam giác hiện tại có một góc bằng

$$m\theta, \quad m \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Nếu $m = 1$, Mộc Lan đã thắng.

Nếu $m \geq 2$, cô cắt từ đỉnh đó và chia góc thành

$$\theta + (m - 1)\theta.$$

Một tam giác con có góc θ . Nếu Thiên Vũ giữ nó, Mộc Lan thẳng ở lần kiểm tra kế tiếp. Để tránh thua ngay, Thiên Vũ buộc phải giữ tam giác con có góc $(m-1)\theta$. Do đó bội nguyên giảm theo

$$m \mapsto m-1.$$

Lập lại, ta được

$$m \rightarrow m-1 \rightarrow \dots \rightarrow 2 \rightarrow 1.$$

Khi $m=2$, nhất cắt $2\theta = \theta + \theta$ tạo góc θ trong cả hai tam giác con, nên Thiên Vũ không còn đường thoát.

Kết luận phía thuận

Nếu

$$\frac{180^\circ}{\theta} = n \in \mathbb{Z},$$

thì Mộc Lan bảo đảm thắng sau hữu hạn bước.

5 Khi q không nguyên: Thiên Vũ tránh thua mãi mãi

Giả sử

$$q = \frac{180^\circ}{\theta} \notin \mathbb{Z}.$$

Thiên Vũ chọn tam giác đều. Ba góc chuẩn hóa ban đầu đều bằng

$$\frac{q}{3},$$

và $q/3$ không nguyên.

Thiên Vũ sẽ duy trì bất biến:

$$\boxed{\text{Cả ba góc chuẩn hóa của tam giác được giữ lại đều không nguyên.}} \quad (5)$$

Bổ đề 5.1. Giả sử a, b, c đều không nguyên và $a + b + c = q \notin \mathbb{Z}$. Sau mọi nhất cắt, ít nhất một trong hai tam giác con vẫn có cả ba góc chuẩn hóa không nguyên.

Chứng minh. Hai tam giác con là (2), (3). Vì b, c không nguyên, tam giác (2) chỉ có thể chứa một góc nguyên nếu

$$x \in \mathbb{Z} \quad \text{hoặc} \quad q - b - x \in \mathbb{Z}.$$

Tương tự, tam giác (3) chỉ có thể chứa một góc nguyên nếu

$$a - x \in \mathbb{Z} \quad \text{hoặc} \quad b + x \in \mathbb{Z}.$$

Giả sử cả hai tam giác con đều có một góc nguyên. Có bốn cách ghép hai điều kiện trên:

1. x và $a - x$ nguyên, suy ra a nguyên;
2. x và $b + x$ nguyên, suy ra b nguyên;
3. $q - b - x$ và $a - x$ nguyên, lấy hiệu suy ra

$$(q - b - x) - (a - x) = c$$

nguyên;

4. $q - b - x$ và $b + x$ nguyên, lấy tổng suy ra q nguyên.

Mỗi trường hợp đều mâu thuẫn với giả thiết. Vậy ít nhất một tam giác con không có góc chuẩn hóa nguyên nào. Thiên Vũ giữ tam giác đó. $\square$

Bất biến (5) được duy trì vô hạn. Vì 1 là số nguyên, tam giác được giữ lại không bao giờ có góc chuẩn hóa bằng 1, tức không bao giờ có góc bằng đúng θ .

Kết luận phía nghịch

Nếu

$$\frac{180^\circ}{\theta} \notin \mathbb{Z},$$

Thiên Vũ có một chiến lược tránh thua mãi mãi.

6 Đáp án hoàn chỉnh

Kết hợp hai phía, Mộc Lan có thể bảo đảm thắng sau hữu hạn bước khi và chỉ khi

$$\frac{180^\circ}{\theta} \in \mathbb{Z}.$$

Do $0^\circ < \theta < 180^\circ$, tất cả các giá trị cần tìm là

$$\theta = \frac{180^\circ}{n}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

7 Kiểm toán các điểm dễ bỏ sót

Bẫy 1: 0° không phải một đáp án

Đề bài quy định rõ $0^\circ < \theta < 180^\circ$. Cụm “sau hữu hạn bước” nói về số lượt chơi, không mở rộng miền giá trị của θ . Mọi tam giác trong trò chơi đều không suy biến, nên mọi góc đều dương.

Bẫy 2: phải khóa cả hai nhánh

Một nhát cắt chỉ tạo góc θ ở một tam giác con là chưa đủ, vì Thiên Vũ có thể bỏ tam giác đó. Bổ đề ở phía thuận tạo một góc nguyên trong cả hai nhánh; bước giảm $m \mapsto m - 1$ sau đó buộc đối thủ đi theo một chuỗi hữu hạn.

Bẫy 3: bất biến không nguyên

Trong phía nghịch, các góc chuẩn hóa có thể là số hữu tỉ không nguyên. Điều cần thiết và đủ để tránh góc θ là không cho bất kỳ góc chuẩn hóa nào bằng số nguyên 1; bất biến mạnh hơn được chọn là không có số nguyên nào.

8 Góc nhìn cấu trúc

Khi q nguyên, Mộc Lan tạo ở hai nhánh hai bội nguyên bù nhau k và $n - k$, rồi dùng monovariant m giảm về 1. Khi q không nguyên, Thiên Vũ giữ bất biến rằng không góc chuẩn hóa nào là số nguyên. Hai cơ chế khóa chính xác tại điều kiện $180^\circ/\theta \in \mathbb{Z}$.