

IMO 2026 - Bài 3

Minimax, ghép cặp và cấu trúc nhị phân

THÔNG TIN TÀI LIỆU

Đáp án:

$$c_n = \frac{2^n}{2^{n+1} - 1}.$$

Chiến lược tối ưu của Lưu Bang: chia theo tỉ lệ $1 : 2 : 4 : \dots : 2^n$.

Kiến trúc chứng minh: cận trên bằng hai tổng tập con gần nhau; cận dưới bằng độ lệch xen kẽ và một thành phần cây trong đồ thị ghép cặp.

1 Đề bài

Cho số nguyên dương n . Lưu Bang đánh dấu không quá n điểm trên một chiếc gậy dài 1. Sau đó Hạng Vũ, biết các điểm của Lưu Bang, đánh dấu không quá n điểm khác. Cắt gậy tại tất cả các điểm đã đánh dấu. Hai người luân phiên lấy một đoạn chưa được lấy, Lưu Bang đi trước. Mỗi người muốn tối đa hóa tổng độ dài của mình.

Xác định số lớn nhất c mà Lưu Bang có thể bảo đảm nhận được, bất kể Hạng Vũ chơi thế nào.

2 Giá trị của một phân hoạch cố định

Giả sử sau tất cả các nhát cắt, các đoạn có độ dài

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_m > 0.$$

Bổ đề 2.1 (Giá trị của trò chọn đoạn). *Với đa tập độ dài cố định, tổng tối ưu của người đi trước bằng*

$$V = x_1 + x_3 + x_5 + \dots.$$

Chứng minh. Người đi trước luôn lấy đoạn lớn nhất còn lại. Ở lượt thứ j của mình, anh ta nhận được ít nhất x_{2j-1} , nên bảo đảm tổng các vị trí lẻ.

Ngược lại, người đi sau ghép các đoạn thành các cặp

$$(x_1, x_2), (x_3, x_4), \dots$$

và nếu m lẻ thì để x_m thành đoạn đơn. Mỗi khi người đi trước lấy một đoạn trong một cặp, người đi sau lấy ngay đoạn còn lại. Vì vậy người đi trước nhận nhiều nhất phần tử lớn hơn trong mỗi cặp, cùng đoạn đơn nếu có. Đó chính là tổng các vị trí lẻ. $\square$

Đặt

$$\Delta = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots.$$

Vì $\sum x_i = 1$,

$$\boxed{V = \frac{1 + \Delta}{2}}. \quad (1)$$

Hạng Vũ muốn làm Δ nhỏ; Lưu Bang muốn giữ một độ lệch dương không thể bị ghép cặp triệt tiêu.

3 Trực giác ghép cặp

Một cặp đoạn bằng nhau không đóng góp vào Δ . Thêm hoặc bỏ hai phần tử bằng nhau khỏi danh sách đã sắp không làm thay đổi độ lệch xen kẽ, vì chúng có thể đặt cạnh nhau và đóng góp $t - t = 0$.

Nếu Lưu Bang dùng ít hơn n điểm, ông tạo không quá n đoạn. Hạng Vũ có thể cắt đôi từng đoạn bằng không quá n nhát cắt, biến toàn bộ thành các cặp bằng nhau. Khi đó

$$\Delta = 0, \quad V = \frac{1}{2}.$$

Vì đáp án cuối lớn hơn $1/2$, chiến lược tối ưu của Lưu Bang phải dùng đủ n điểm và tạo đúng $n + 1$ đoạn.

4 Ứng viên và chiến lược của Lưu Bang

Đặt

$$S = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Lưu Bang chia cây gậy thành $n + 1$ đoạn có độ dài

$$\frac{1}{S}, \frac{2}{S}, \frac{4}{S}, \dots, \frac{2^n}{S}.$$

Ứng viên là

$$c_n = \frac{2^n}{2^{n+1} - 1}.$$

Ta chứng minh cận trên và cận dưới trùng nhau.

5 Cận trên: đối chiến lược của Hạng Vũ

Trước hết xét trường hợp Lưu Bang tạo $k \leq n$ đoạn. Như trên, Hạng Vũ cắt đôi tất cả và ép phần của Lưu Bang bằng $1/2$, không vượt ứng viên.

Bây giờ giả sử Lưu Bang tạo đúng $n + 1$ đoạn có độ dài

$$a_0, a_1, \dots, a_n, \quad \sum_{i=0}^n a_i = 1.$$

Xét 2^{n+1} tổng tập con

$$s_I = \sum_{i \in I} a_i, \quad I \subseteq \{0, 1, \dots, n\}.$$

Tất cả nằm trong $[0, 1]$. Khi sắp tăng dần, trong $2^{n+1} - 1$ khoảng liên tiếp phải có một khoảng dài không quá

$$\delta = \frac{1}{2^{n+1} - 1}.$$

Do đó tồn tại hai tập con khác nhau I, J sao cho

$$|s_I - s_J| \leq \delta.$$

Bỏ phần giao của chúng, ta thu được hai tập rời nhau P, Q và tập còn lại Z , với

$$\left| \sum_{i \in P} a_i - \sum_{j \in Q} a_j \right| \leq \delta. \quad (2)$$

5.1 Bổ đề ghép hai họ đoạn

Bổ đề 5.1. Cho p đoạn có tổng độ dài A và q đoạn có tổng độ dài $B \leq A$. Có thể dùng không quá $p + q - 1$ nhát cắt để chia chúng thành các cặp bằng nhau, phủ toàn bộ phía có tổng B , và để lại các đoạn chưa ghép ở phía kia có tổng $A - B$.

Chứng minh. So sánh hai đoạn đang xét. Nếu bằng nhau, ghép chúng và chuyển sang cặp tiếp theo. Nếu một đoạn dài hơn, cắt đoạn dài để tạo một phần bằng đoạn ngắn, ghép hai phần bằng nhau rồi tiếp tục với phần dư. Mỗi nhát cắt làm cận ít nhất một đoạn đang hoạt động. Trước khi một phía bị dùng hết, điều này xảy ra không quá $p + q - 1$ lần. $\square$

Hạng Vũ thực hiện như sau.

- Với mỗi $i \in Z$, cắt đoạn a_i ở trung điểm. Chi phí là $|Z|$ nhát cắt và tạo các cặp bằng nhau.
- Dùng bổ đề để ghép các đoạn thuộc P với các đoạn thuộc Q . Chi phí không quá $|P| + |Q| - 1$.

Tổng số nhát cắt không vượt

$$|Z| + |P| + |Q| - 1 = (n + 1) - 1 = n.$$

Sau khi bỏ các cặp bằng nhau, phần chưa ghép có tổng độ dài

$$r = \left| \sum_{i \in P} a_i - \sum_{j \in Q} a_j \right| \leq \delta.$$

Độ lệch xen kẽ của một đa tập số dương không vượt tổng của nó, nên

$$\Delta \leq r \leq \delta.$$

Theo (1), Hạng Vũ ép được

$$V \leq \frac{1 + \delta}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1} - 1} \right) = \frac{2^n}{2^{n+1} - 1}.$$

Vậy

$$c_n \leq \frac{2^n}{2^{n+1} - 1}. \quad (3)$$

6 Cận dưới: cấu trúc nhị phân của Lưu Bang

Nhân tất cả độ dài với $S = 2^{n+1} - 1$. Ta chỉ cần chứng minh rằng nếu các đoạn ban đầu có độ dài

$$1, 2, 4, \dots, 2^n$$

và Hạng Vũ dùng không quá n nhát cắt, thì độ lệch xen kẽ của các đoạn cuối ít nhất bằng 1.

Sau các nhát cắt, có không quá

$$(n + 1) + n = 2n + 1$$

đoạn. Sắp chúng theo thứ tự

$$y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_m > 0, \quad m \leq 2n + 1.$$

Đặt

$$\Delta' = y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + \dots.$$

Ta cần chứng minh $\Delta' \geq 1$.

6.1 Đồ thị của các cặp

Mỗi đoạn cuối có một đoạn cha trong số $1, 2, 4, \dots, 2^n$. Ghép các đoạn cuối theo thứ tự

$$(y_1, y_2), (y_3, y_4), \dots$$

Dựng một đa đồ thị G :

- có $n + 1$ đỉnh, đỉnh i ứng với đoạn cha dài 2^i ;
- mỗi cặp (y_{2j-1}, y_{2j}) tạo một cạnh nối hai đoạn cha của chúng;
- nếu hai đoạn có cùng cha, cạnh là một khuyên.

Số cạnh là

$$\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \leq n.$$

Một đa đồ thị có $n + 1$ đỉnh và không quá n cạnh phải có ít nhất một thành phần liên thông không chứa chu trình hoặc khuyên. Gọi thành phần ấy là T ; nó là một cây, trong đó một đỉnh cô lập cũng được coi là cây.

6.2 Tô hai màu và tổ hợp có dấu

Tô hai màu các đỉnh của T . Đặt

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{nếu đỉnh } i \text{ thuộc màu thứ nhất,} \\ -1, & \text{nếu đỉnh } i \text{ thuộc màu thứ hai,} \\ 0, & \text{nếu đỉnh } i \notin T. \end{cases}$$

Không phải mọi ε_i đều bằng 0.

Xét số nguyên

$$R = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i 2^i.$$

Chọn j lớn nhất sao cho $\varepsilon_j \neq 0$. Khi đó

$$2^j > 1 + 2 + \dots + 2^{j-1},$$

nên số hạng $\varepsilon_j 2^j$ không thể bị các số hạng bậc thấp hơn triệt tiêu. Vì thế

$$R \neq 0, \quad |R| \geq 1. \quad (4)$$

Thay mỗi 2^i bằng tổng các đoạn con có cha là i . Khi đó R trở thành một tổng có dấu của các y_j .

Xét một cặp (y_{2j-1}, y_{2j}) .

- Nếu cạnh tương ứng không thuộc thành phần T , cả hai hệ số bằng 0.
- Nếu cạnh thuộc T , hai đầu cạnh có hai màu khác nhau, nên đóng góp của cặp bằng

$$\pm(y_{2j-1} - y_{2j}).$$

Nếu m lẻ, đoạn đơn y_m đóng góp 0, y_m hoặc $-y_m$. Bất đẳng thức tam giác cho

$$|R| \leq (y_1 - y_2) + (y_3 - y_4) + \dots = \Delta'.$$

Kết hợp với (4),

$$\boxed{\Delta' \geq 1.} \quad (5)$$

Trở lại thang độ dài ban đầu,

$$\Delta \geq \frac{1}{S} = \frac{1}{2^{n+1} - 1}.$$

Theo (1), Lưu Bang bảo đảm

$$V \geq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1} - 1} \right) = \frac{2^n}{2^{n+1} - 1}.$$

Vậy

$$c_n \geq \frac{2^n}{2^{n+1} - 1}. \quad (6)$$

7 Kết luận

Từ (3) và (6),

$$c_n = \frac{2^n}{2^{n+1} - 1}.$$

Chiến lược tối ưu của Lưu Bang là chia cây gậy theo tỉ lệ

$$1 : 2 : 4 : \dots : 2^n.$$

Các giá trị đầu tiên là

$$c_1 = \frac{2}{3}, \quad c_2 = \frac{4}{7}, \quad c_3 = \frac{8}{15}, \quad c_4 = \frac{16}{31}.$$

8 Diễn giải trực giác

Hạng Vũ không chỉ cắt đôi từng đoạn. Chiến lược cận trên cho thấy bản chất sâu hơn: ông tìm hai tổng tập con gần nhau, cắt các đoạn thành một phép ghép hoàn hảo và dồn toàn bộ bất cân bằng vào một phần dư rất nhỏ.

Lưu Bang chống lại bằng hệ nhị phân. Các lũy thừa của 2 khiến mọi tổ hợp có hệ số $-1, 0, 1$ khác 0 có độ lớn ít nhất 1. Ngân sách n nhất cắt tạo không quá n cạnh trên $n+1$ đoạn cha, nên luôn còn một thành phần cây để sinh ra tổ hợp có dấu không thể bị triệt tiêu.

Cấu trúc minimax

Cận trên: subset sums gần nhau $\Rightarrow$ ghép cặp gần hoàn hảo.

Cận dưới: lũy thừa 2 + thành phần cây $\Rightarrow$ độ lệch tối thiểu bằng một đơn vị.

Hai chứng thư gặp nhau tại $2^n / (2^{n+1} - 1)$.